RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Fortsetzung der Zetafunktion

Sören Lammers

Ausarbeitung zum Vortrag im *Proseminar Analysis*
(Sommersemester 2009, Leitung Prof. Dr. E. Freitag)

Zusammenfassung: Thema dieser Ausarbeitung ist die Riemannsche Zetafunktion. Zunächst wird etwas über den Namensgeber Bernhard Riemann sowie zur Geschichte der Zetafunktion gesagt. Im nächsten Abschnitt wird dann die Zetafunktion sowie die alternierende Zetafunktion auf ihre Konvergenz hin überprüft. An dieser Stelle werden einige wichtige Sätze des vorherigen Vortrages benutzt, welcher sich mit Dirichletreihen im Allgemeinen beschäftigte. Mit Hilfe dieser Grundlage wird versucht, die Zetafunktion in einen größeren Definitionsbereich sinnvoll fortzusetzen. Dieses geschieht in diesem Fall mittels zweier geschickt gewählter Dirichletreihen, welche die Möglichkeit bieten, die Zetafunktion neu zu definieren. Dabei wird ein Satz aus der Funktionentheorie benutzt, der hier nur am Rande erwähnt und nicht weiter erläutert wird. Anschließend wird noch der Primzahlsatz angesprochen, welcher mit Hilfe der Zetafunktion bewiesen werden konnte. Zum Schluss werden noch andere Eigenschaften der Zetafunktion erwähnt, welche dazu motivieren könnten, sich weiter mit diesem Thema und der Funktionentheorie im Ganzen auseinanderzusetzen.

Inhaltsverzeichnis

1 Geschichte

Die Riemannsche Zetafunktion ist die berühmteste aller Dirichletreihen, man erhält sie aus der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n^{-s},\ s \in \mathbb{C}$ als Spezialfall, indem man alle Koeffizienten $a_n = 1$ setzt:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},\ s \in \mathbb{C} \tag{1.1}$$

Sie ist nach dem deutschen Mathematiker Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) benannt. Bernhard Riemann studierte Mathematik in Göttingen und Berlin, unter anderem hörte er Vorlesungen von Gauß, Dirichlet und Jacobi. In seiner achtseitigen Arbeit „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ von 1859 versuchte er, den Primzahlsatz zu beweisen. In dieser Arbeit trifft man auch zum ersten Mal auf die berühmte Riemannsche Vermutung, die in diesem Jahr ihr 150-jähriges Jubiläum feiert. Diese Arbeit war die einzige von Riemann veröffentlichte Arbeit zur Zahlentheorie und trotzdem gingen aus Riemanns Ideen viele bedeutende Arbeiten von anderen großartigen Mathematikern - wie Hadamard, von Mangoldt, de la Valleé Poussin, Landau oder Hardy - hervor. Obwohl Bernhard Riemann schon mit 39 Jahren an Tuberkulose starb, zählt er bis heute zu den bedeutendsten Mathematikern.
Ein paar Dinge, die nach ihm benannt sind: Riemann-Integral, Riemannsche Zetafunktion, Riemannsche Vermutung, Riemannscher Abbildungssatz, Riemannsche Fläche, Riemannscher Umordnungssatz, Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen. Riemann gilt zudem als Begründer der Funktionentheorie. Die Zetafunktion tritt ersmtals bei Euler auf, der versuchte, das sogenannte „Basler-Problem“ zu lösen und damit $\zeta(2)$ zu berechnen (1735). Doch er beschäftigte sich mit der Zetafunktion nur im Reellen, Riemann weitete sie dann ins Komplexe aus. Außerdem fand Euler schon eine bemerkenswerte Produktentwicklung für die Zetafunktion, welche am Ende des Vortrages noch einmal erwähnt wird.

2 Einige Konvergenzüberlegungen

Im Folgenden wird die historische Schreibweise $s = \sigma + i \cdot t$ benutzt.

2.1 Absolute Konvergenz der Zetafunktion

Wie im vorherigen Vortrag schon gezeigt, gilt:

$$|n^{-s}| \overset{\text{def}}{=} |e^{-s\log(n)}| = |e^{-\sigma\log(n)}| \cdot \underbrace{|e^{-it\log(n)}|}_{=1} = n^{-\sigma} \tag{2.1}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \tag{2.2}$$

Dass diese Reihe für $\sigma > 1$ konvergiert, wurde in Analysis I schon mit Hilfe der verdichteten Reihe gezeigt. Einen viel schöneren Beweis benutzt jedoch das Integralvergleichskriterium:

Lemma 2.1 (Integralvergleichskriterium) *Sei $f(x) > 0$ stetig und monoton fallend auf $[m, \infty)$. Dann gilt:*

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) \textit{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_m^{\infty} f(x)dx \textit{ konvergiert.}$$

Dieses ist anschaulich klar:

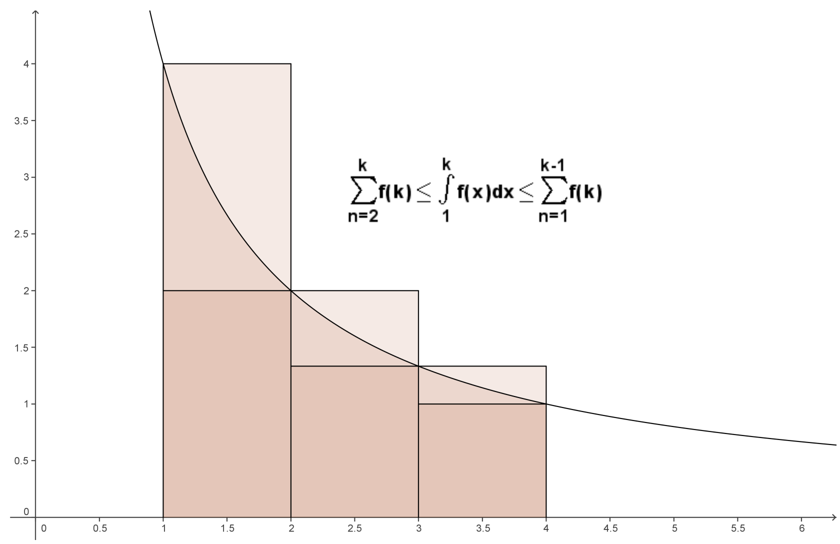

Abbildung 2.1: Zur Veranschaulichung des Integralvergleichskriteriums

Für die Zetafunktion erhält man somit:

$$\int_1^b x^{-\sigma} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\sigma+1} b^{-\sigma+1} - \frac{1}{-\sigma+1} & \text{für} \sigma \neq 1 \\ \log|b| & \text{für} \sigma = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Der Grenzwert $\lim_{b\to\infty}$ existiert für $\sigma > 1$, für $\sigma \leq 1$ divergiert das Integral.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \quad \text{konvergiert für} \quad \sigma > 1. \tag{2.4}$$

Damit ist die Halbebene der absoluten Konvergenz gefunden:

$$A_\zeta = \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s > 1\} \tag{2.5}$$

2.2 Nicht notwendig absolute Konvergenz der Zetafunktion

Im vorherigen Vortrag haben wir bereits gezeigt, dass es auch eine Konvergenzhalbebene der bedingten Konvergenz gibt, wenn die Reihe in mindestens einem Punkt $s_0 \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig absolut) konvergiert. Dann konvergiert die Reihe für alle s mit $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$. Betrachtet man nun die Zetafunktion auf der reellen Geraden($t = 0$), erhält man die gerade schon behandelte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$, welche für $\sigma > 1$ konvergiert und $\sigma \leq 1$ divergiert. Daher konvergiert die Reihe für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$. Damit ist auch die Halbebene der bedingten Konvergenz gegeben durch

$$B_\zeta = \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s > 1\} \tag{2.6}$$

2.3 Absolute Konvergenz der alternierenden Zetafunktion

Betrachtet man nun die „alternierende“ Zetafunktion $\zeta_{alt}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^{-s}$, erhält man:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \cdot n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n| \cdot |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \tag{2.7}$$

Dieser Fall wurde schon behandelt: Die Reihe konvergiert demnach für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$:

$$A_{\zeta_{alt}} = \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s > 1\} \tag{2.8}$$

2.4 Nicht notwendig absolute Konvergenz der alternierenden Zetafunktion

Betrachtet man die Zetafunktion wieder zuerst im Reellen, so erhält man:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^{-\sigma} \tag{2.9}$$

Diese Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen für (reelle) $\sigma > 0$ und divergiert für $\sigma \leq 0$. Hier greift wiederum der Satz, dass die Reihe dann sogar in der gesamten „rechten“ Halbebene konvergiert, also gilt:

$$B_{\zeta_{alt}} = \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s > 0\}. \tag{2.10}$$

Hier erkennt man einen wichtigen Unterschied zu dem Konvergenzverhalten von Potenzreihen, welche in ihrem Konvergenzradius (falls existent) auch direkt absolut konvergieren. Weiterhin ist diese Beziehung zwischen den sogenannten Konvergenzabzissen der absoluten Konvergenz für $\sigma_0 = 1$ und der bedingten Konvergenz für $\sigma_1 = 0$ ein „Extremfall“ für die letztes Mal hergeleitete Beziehung für Konvergenzabzissen: $\sigma_0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_0 - 1$

3 Fortsetzung der Zetafunktion

Als nächstes soll gezeigt werden, dass man die Riemannsche Zetafunktion für $\operatorname{Re} s > 0$ sinnvoll definieren kann und sie somit in die Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ „fortsetzen“ kann. Hierzu werden zwei Funktionen definiert:

$$\begin{aligned} P(s) &:= (1 - 2^{1-s})\zeta(s)\,, \\ Q(s) &:= (1 - 3^{1-s})\zeta(s)\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Da $\zeta(s)$ für $\operatorname{Re} s > 1$ konvergiert, lassen sich folgende Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned} P(s) \quad &= (1-2^{1-s})\zeta(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2^{1-s}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-s} \end{aligned}$$

Umformen liefert(für $\operatorname{Re} s > 1$):

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{2}{2^s} + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{4^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^{-s} =: \tilde{P}(s) \end{aligned}$$

Diese so gewonnene Reihe konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$. Man kann $\zeta(s)$ also neudefinieren als:

$$\zeta_P(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}}\tilde{P}(s) \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 0 \text{ und } 1-2^{1-s} \neq 0 \tag{3.2}$$

Es müssen die Nullstellen des Nenners (potentielle Pole) herausgenommen werden:

$$\begin{aligned} 1-2^{1-s} \quad &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 1 \quad &= e^{(1-s)\log 2} \\ \Leftrightarrow \quad 2\pi i k \quad &= (1-s)\log 2 \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \quad s \quad &= 1 - \frac{2\pi i k}{\log 2} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Wie bei $P(s)$ kann man diese Umformungen auch bei $Q(s)$ für $\operatorname{Re} s > 1$ vornehmen:

$$\begin{aligned} Q(s) \quad &= (1-3^{1-s}\zeta(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 3\sum_{n=1}^{\infty}(3n)^{-s} \end{aligned}$$

Umformen liefert(für $\operatorname{Re} s > 1$):

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{2}{6^s} + \dots \\ &= \sum_{n \not\equiv 0 \bmod 3} n^{-s} - 2 \sum_{n \equiv 0 \bmod 3} n^{-s} \\ &= \underbrace{\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s}}_{a_1} - \underbrace{\left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^s}\right)}_{a_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s}\right)}_{a_3} - \underbrace{\left(\frac{1}{6^s} + \frac{1}{6^s}\right)}_{a_4} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n =: \tilde{Q}(s) \end{aligned}$$

Für reelle $s > 0$ ist a_n monoton fallend und nach dem Leibnizkriterium konvergiert diese Reihe demnach für reelle $s > 0$. Damit konvergiert die Reihe in der kompletten Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$. Damit kann man $\zeta(s)$ schreiben als:

$$\zeta_Q(s) := \frac{1}{1-3^{1-s}}\tilde{Q}(s) \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 0 \text{ und } 1-3^{1-s} \neq 0 \tag{3.3}$$

Herausgenommen werden müssen also folgende Punkte:

$$\begin{aligned} & 1-3^{1-s} && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & s && = 1 - \frac{2\pi i k}{\log 3} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Damit bekommt man für die Zetafunktion zwei unterschiedliche Fortsetzungen, wobei von vornherein $\zeta(s) = \zeta_Q(s) = \zeta_P(s)$ nur für $\operatorname{Re} s > 1$ klar ist. Man könnte nun nachrechnen, dass $P(s)(1-3^{1-s}) = Q(s)(1-2^{1-s})$ für $\operatorname{Re} s > 0$ erfüllt ist. Das ist aber unnötig, da nach einem Satz aus der Funktionentheorie solche Fortsetzungen bei analytischen Funktionen immer eindeutig sind. Analytisch bedeutet dann nichts anderes als komplex differenzierbar, wobei man die komplexe Differenzierbarkeit wie im Reellen definieren kann als $\lim_{s \to a} \frac{f(s)-f(a)}{s-a}$.
Nun kann man sich überlegen, dass gemeinsamer Ausnahmepunkt der möglichen Polstellen lediglich $s = 1$ ist:
Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $k' \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Gleichsetzen liefert dann:

$$\begin{aligned} & 1 - \tfrac{2\pi i k}{\log 3} && = 1 - \frac{2\pi i k'}{\log 2} \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{k}{k'} && = \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3 \end{aligned}$$

Da $k, k' \in \mathbb{Z}$ ist $\frac{k}{k'} \in \mathbb{Q}$.
Angenommen, $\log_2 3 \in \mathbb{Q}$, also

$$\begin{aligned} & \log_2 3 && = \frac{p}{q} \quad p, q \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \quad & 2^{\frac{p}{q}} && = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 2^p && = 3^q \quad \lightning, \text{ da } 2^p \text{ gerade und } 3^q \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Gleichheit gilt also nur für $k' = k = 0$ und damit für $s = 1$.
Man erhält also eine wohldefinierte stetige Fortsetzung von $\zeta(s)$ in die Halbebene $\{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s > 0, s \neq 1\}$.
Nun ist noch nachzuweisen, dass $\zeta(s)$ bei $s = 1$ tatsächlich einen Pol besitzt.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{(s\to 1)} \zeta(s) &= \lim_{(s\to 1)} \frac{s-1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{s\to 1} \frac{s-1}{1-2^{1-s}} \log 2 \\
&= \lim_{s\to 1} \frac{1}{-\log 2 \cdot 2^{1-s} \cdot (-1)} \log 2 \\
&= \lim_{s\to 1} \frac{1}{2^{1-s}} = 1
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ gilt Gleichheit, da die Dirichletreihe in ihrem Konvergenzbereich stetig ist (siehe vorherigen Vortrag).

4 Weitere Eigenschaften der Zetafunktion

Zunächst wird der Primzahlsatz formuliert:

Theorem 4.1 (Primzahlsatz) *Sei* $\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} | p \leq x\}$. *Dann gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

oder auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{Li(x)} = 1$$

mit $\quad Li(x) := \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ *(„Integrallogarithmus“)*

Dieser Satz wurde erstmals von Gauß formuliert und sagt etwas über die Verteilung oder die Dichte der Primzahlen aus. Der Beweis wurde erst 1896 von Hadamard und Poussin unabhängig voneinander erbracht.
Was hat der Primzahlsatz mit der Zetafunktion zu tun?
Wie bereits zu Anfang erwähnt, hat Euler eine Produktentwicklung für die Zetafunktion gefunden:

$$\zeta(s) = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-s}} \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 1. \tag{4.1}$$

Hier erkennt man also eine direkte Verbindung zwischen den Primzahlen und der Zetafunktion. Es ist leicht einzusehen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, da

$$\lim_{s\to 1} \zeta(s) \text{ divergiert} \Rightarrow \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-1}} \text{ divergiert} \Rightarrow \text{ unendlich viele Primzahlen.}$$

Weiterhin zeigt diese Formel, dass $\zeta(s)$ für $\operatorname{Re} s > 1$ keine Nullstellen besitzt. Der Primzahlsatz folgt nun daraus, dass $\zeta(s)$ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$ keine Nullstelle besitzt (auf diesem Wege wurde der Primzahlsatz auch 1896 bewiesen). Nun kann man noch die Restgliedabschätzung betrachten. Hierfür gilt:

$$\pi(x) = Li(x) + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}) \tag{4.2}$$

Nun wäre eine bessere Abschätzung:

$$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x}\log x) \tag{4.3}$$

Diese Vermutung ist jedoch bis heute unbewiesen – sie ist äquivalent zur Riemannschen Vermutung:

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \operatorname{Re} s > \frac{1}{2} \tag{4.4}$$

Gezeigt ist „lediglich“, dass unendlich viele Nullstellen auf $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ liegen.
Es gibt auch Möglichkeiten, die Zetafunktion in die ganze komplexe Ebene zu erweitern bzw. fortzusetzen. Dieses hat Riemann in seiner Arbeit von 1859 getan und er fand für die Zetafunktion folgende Funktionalgleichung:

$$\zeta(s)\pi^{\frac{s}{2}}\Gamma(s) = \zeta(1-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2}) \tag{4.5}$$

oder auch:

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{4.6}$$

Wobei $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ die Gammafunktion bezeichnet. Man erkennt:

- $\zeta(-2k) = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), dies sind die sogenannten trivialen Nullstellen der Zetafunktion.

- Die Funktionalgleichung zeigt eine gewisse „Symmetrie“, wobei $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ die Symmetrieachse ist. Da $\zeta(s) \neq 0\ \forall s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$(Euler), gibt es neben den trivialen Nullstellen auch keine weiteren Nullstellen für $\operatorname{Re} s < 0 \Rightarrow$ „kritischer Streifen“ für Nullstellen ist $\{s \in \mathbb{C} | 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1\}$

Beispiel: Berechnung von $\zeta(-1)$:

$$\begin{aligned} \zeta(-1) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^2}(-1) \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12} \\ „\Rightarrow \quad 1+2+3+4+\ldots &= -\frac{1}{12}“ \end{aligned}$$

Literatur

[1] Eberhard Freitag, Rolf Busam: Funktionentheorie. Springer-Verlag, 2007.

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann; Zugriff am 2009-05-11